Das geometrische π

π geometrisch ermittelt als Gerade im Thaleskreis (mit 99,9%iger Genauigkeit).

nach Hans-Werner Meixner
und Coautor Christian Meixner

Als Basis für die Ausführungen zur geometrischen Ermittlung der Kreiszahl π werden die folgenden bekannten Lehrsätze der Mathematik als bekannt und bewiesen vorausgesetzt und anschließend verwendet.

Die Kreiszahl π

Die Kreiszahl π ist eine mathematische Konstante, für die gilt:
$U = 2\pi \cdot r$, wobei U die Länge eines Kreises mit dem Radius r ist.[1] Die Kreiszahl π beschreibt somit das Verhältnis zwischen dem Durchmesser d (mit $d = 2 \cdot r$) und dem Umfang eines Kreises. Für einen Kreis mit $d = 1$ gilt folglich $U = \pi$.
Die Kreiszahl π beginnt mit π = 3,141592653…..[2]

Satz des Thales

„Sei k ein Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$. Liegt der Eckpunkt C ABC auf k, so hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.“[3]

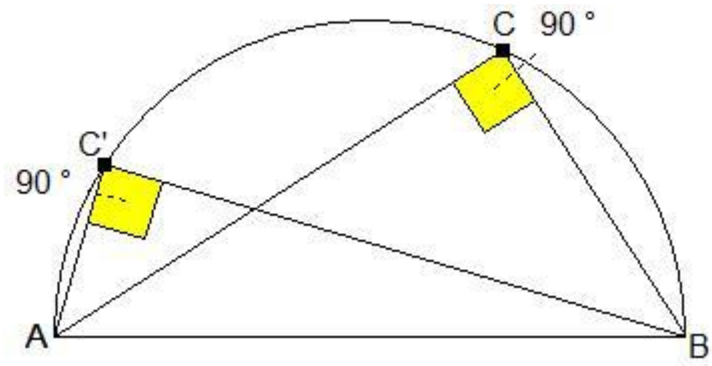


Abb.1

[1] Vgl. Fritzsche (2001): 167
[2] Vgl. ebd.: 166
[3] Wellstein, Kirsche (2009): 30

Satz des Pythagoras

„In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.“[4]
Oder:

Hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so gilt $a^2 + b^2 = c^2$.“[5]

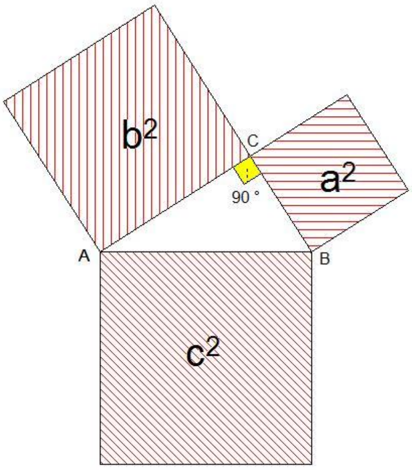


Abb. 2

Kathetensatz des Euklid

„Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.“[6] Die Hypotenusenabschnitte p und q (siehe Abb. 3) werden durch den Fußpunkt der Höhe h_c auf der Hypotenuse c bestimmt.

Folglich gilt: $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$

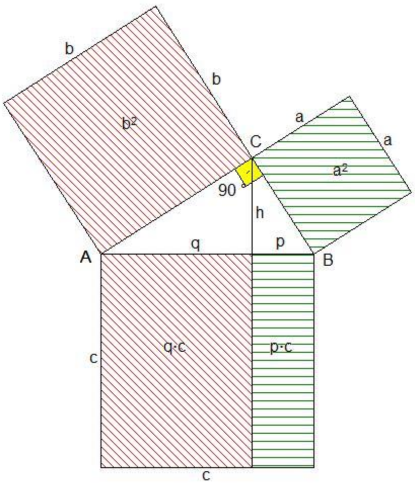


Abb. 3

[4] Scheid, Schwarz (2007): 27
[5] Wellenstein. Kirsche (2009): 72
[6] Ebd.: 74

Höhensatz des Euklid

„In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe zur Hypotenuse gleich (flächeninhaltsgleich) dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten [p und q].“[7]
Folglich gilt: $h_c^2 = p \cdot q$

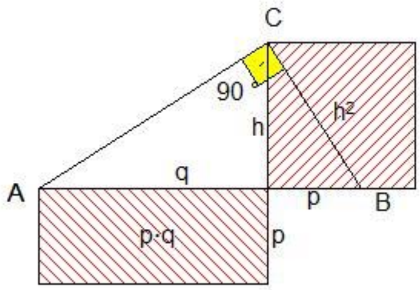


Abb. 4

[7] Scheid, Schwarz (2007): 32

π als Gerade im Thaleskreis

In einem rechtwinkligen Dreieck ergibt die Addition der Flächen der Kathetenquadrate ein „besonderes Ergebnis". Ihre Summe ist gleich der Fläche des Hypotenusenquadrates.

Nach Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

Es erscheint interessant zu überprüfen ob nicht auch die Differenz der Flächen der Kathetenquadrate zu einem „besonderen Ergebnis" führt, zumindest dann wenn das rechtwinklige Dreieck eine weitere geometrische Besonderheit aufweist.

Erste Annahme

Sei ABC ein Dreieck in einem Thaleskreis über der Hypotenuse c.
Die beiden Katheten a und b dieses Dreiecks sind gleich lang.
Der von den Katheten gebildete Winkel ist somit rechtwinklig, also 90°.
Die Hypotenuse c wird durch die auf ihr stehende Höhe h_c in die Hypotenusenabschnitte q (links) und p (rechts) geteilt.

Feststellungen hierzu:

Die Katheten a und b haben in diesem Fall die maximal mögliche Gesamtlänge.

Die Summe der Flächen der zwei Kathetenquadraten entsprechen in ihrer Summe dem Hypotenusenquadrat, also $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagoras).

Da die beiden Katheten gleich lang sind, sind auch die beiden Kathetenquadrate in Ihrer Fläche gleich groß. Die Differenz der Flächen der zwei Kathetenquadrate ist somit 0.
Dies ist die kleinste Größe, welche diese Differenz im Betrag haben kann.

Das Höhenquadrat hat in diesem Fall die maximal mögliche Fläche.

Zweite Annahme:

Der Punkt C des Dreiecks wird auf dem Thaleskreis gegen den Uhrzeigersinn (nach links) verschoben.

Feststellungen hierzu:

Die Kathete a wird länger während Kathete b kürzer wird.

Die Summe der Flächen der zwei Kathetenquadraten entsprechen in ihrer Summe unverändert dem Hypotenusenquadrat, also $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagoras).

Da die beiden Katheten unterschiedlich lang werden, wird auch die Fläche ihrer Quadrate unterschiedlich. Die Differenz ($a^2 - b^2$) wird umso größer je weiter der Punkt C entsprechend verschoben wird.

Die Fläche des Kathetenquadrates a^2 entspricht der Fläche des Rechtecks von p x c.
Die Fläche des Kathetenquadrates b^2 entspricht der Fläche des Rechtecks von q x c.

Die Fläche des Höhenquadrates wird umso kleiner je weiter Punkt C entsprechend verschoben wird.

Dritte Annahme:

Der Punkt C des Dreiecks wird auf dem Thaleskreis soweit gegen den Uhrzeigersinn (nach links) verschoben bis die Differenz der beiden Kathetenquadrate ($a^2 - b^2$) dem Vierfachen des Höhenquadrates ($4h_c^2$) entspricht.

Feststellungen hierzu:

Die sich ergebende Höhe h_c ist mit 99,9 % iger Genauigkeit 1/8 des
Umfangs des verwendeten Thaleskreises.

Vierte Annahme:

Sei die Länge der Hypotenuse beispielsweise 8.

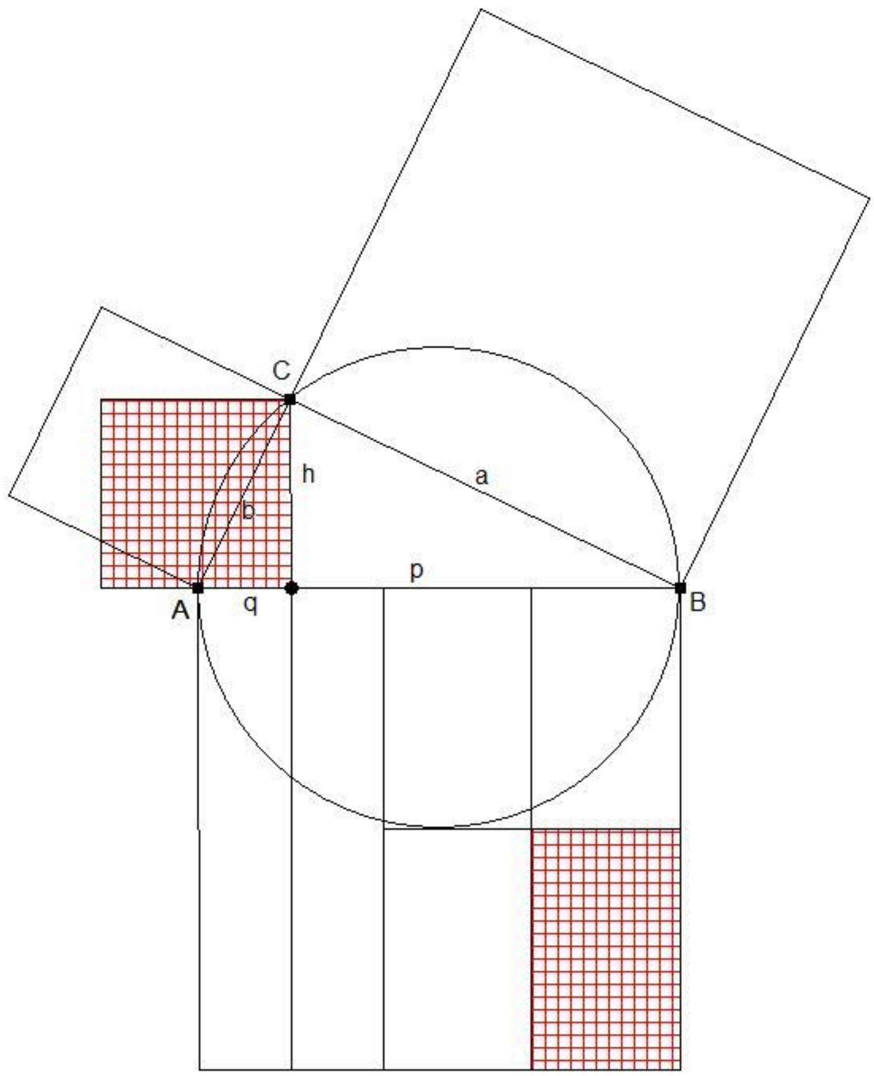
Feststellungen hierzu:

Der sich ergebende Kreis hat den Umfang 8π.

Die sich ergebende Höhe des Dreiecks ist mit einer Genauigkeit von 99,9 Prozent 1/8 des Kreisumfangs von 8π und ist somit π lang und zeigt π als <u>gerade</u> Strecke.

Algebraische Ableitungen hieraus:

Seien die Bezeichnungen des Dreiecks wie in der Skizze dargestellt:



Durch die Verschiebung des Punktes C ergibt sich mit obiger Annahme die folgende Gleichung:

$$a^2 - b^2 = 4{h_c}^2$$

Mit dem Kathetensatz ($a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$) und dem Höhensatz (${h_c}^2 = p \cdot q$) folgt:

$$p \cdot c - q \cdot c = 4 \cdot p \cdot q$$

Außerdem soll gelten, dass $c = 8$ ist. Damit folgt:

$$p \cdot 8 - q \cdot 8 = 4 \cdot p \cdot q \quad | : 8$$

$$p - q = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$$

Mit $c = 8 => q + p = 8 => p = 8 - q$ folgt nun weiter:

$$(8 - q) - q = \frac{1}{2} \cdot (8 - q) \cdot q$$

$$8 - 2q = 4q - \frac{1}{2}q^2 \quad | + \frac{1}{2}q^2 - 4q$$

$$\frac{1}{2}q^2 - 6q + 8 = 0 \qquad | \cdot 2$$

$$q^2 - 12q + 16 = 0$$

$$q_{1,2} = 6 \pm \sqrt{20}$$

Da für „+“

$$q = 6 + \sqrt{20} \approx 10{,}47 > 8 = c$$

gilt, muss für q gelten:

$$q = 6 - \sqrt{20} \approx 1{,}527864045$$

Daraus folgt für p:

$$p = 8 - q = 8 - \left(6 - \sqrt{20}\right) = 2 + \sqrt{20} \approx 6{,}472135955$$

Somit können wir nun h_c bestimmen:

$$h_c{}^2 = p \cdot q$$

$$h_c{}^2 = (2 + \sqrt{20}) \cdot (6 - \sqrt{20})$$

$$h_c = \sqrt{(2 + \sqrt{20}) \cdot (6 - \sqrt{20})}$$

$$h_c = \sqrt{4\sqrt{20} - 8}$$

bzw.

$$\boldsymbol{h_c = \sqrt{\sqrt{320} - 8} \approx 3,144605511}$$

Vergleich mit π:

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{h_c} = \frac{\pi}{\sqrt{\sqrt{320} - 8}} \approx 0,999041896}$$

Fazit:

Aus den Voraussetzungen

$$p + q = 8$$
$$p - q = \frac{1}{2}\, p \cdot q$$

und dem umgestellten Höhensatz

$$h_c = \sqrt{p \cdot q}$$

folgt für das voranstehend dargestellte Dreieck, dass die Strecke h mit einer 99,9% igen Genauigkeit die Länge π hat. Das heißt, in diesem besonderen Dreieck gilt:

$$\pi \approx \sqrt{p \cdot q}$$

Sicherlich ist dies keine besonders exakte Ausdrucksweise für π. Hierzu gibt es weit bessere Möglichkeiten wie zum Beispiel

$$= \sqrt[17]{\sqrt{8} \cdot 10^8}$$

Dies ergibt 3,14159144414199…… was viel näher an der Kreiszahl π liegt, jedoch entbehren solche Annäherungen der geometrischen Grundlage.

Allgemeines

Das Besondere an der Konstruktion des Dreiecks ist, dass diese nicht anhand der Angabe von Maßen durchgeführt wird. Es wird lediglich vorausgesetzt dass es ein rechtwinkliges Dreieck ist und die Konstruktion erfolgt losgelöst von Maßangaben anhand der Vorgabe, dass die Flächendifferenz der Kathetenquadrate dem Vierfachen des Höhenquadrates entsprechen soll.

Die voranstehende Ausführung, bei der 8 als Wert der Hypotenuse c angenommen wurde ist nur als vorteilhafte Ausführung gewählt um die Übereinstimmung mit der Kreiszahl π zu verdeutlichen.

Das Verhältnis in einem solchen Dreieck von der Höhe h_c zur Hypotenuse c ist konstant, so wie der Durchmesser eines Kreises ein konstantes Verhältnis zu seinem Umfang hat. Als Formel ausgedrückt lässt sich dieses Verhältnis zwischen der Höhe h_c und der Hypotenuse des Dreiecks wie folgt beschreiben:

$$\frac{h_c}{c} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (\sqrt{5} - 1)}$$

In jedem Dreieck das nach den nachfolgenden Vorgaben konstruiert wird:

1. rechtwinklig im Thaleskreis

2. die Differenz zwischen den Kathetenquadraten beträgt das Vierfache des Höhenquadrates

wird die Höhe h_c auf der Hypotenuse 1/8 des Kreisumfangs (mit 99,9 % iger Genauigkeit) des Thaleskreises als Länge haben und somit 1/8 Teilkreisabschnitt als Gerade zeigen. Eine Verachtfachung dieser geraden Strecke zeigt folglich den gesamten Kreisumfang als Gerade.

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{8\,h_c}{c} = \sqrt{8 \cdot (\sqrt{5} - 1)}$$

Diese so geometrisch für π ermittelte Größe beträgt: 3,144605511

Die erste Basisformel lautet:

$$p + q \; = 8$$
$$p - q = \frac{1}{2}\, p \cdot q$$
$$\pi \;\approx\; h_c = \sqrt{p \cdot q}$$

Da nach der Aussage von Albert Einstein Formeln „schön“ sein sollten und die Zahl 4 im weiteren Sinn das Quadrat mit 4 Ecken, 4 rechten Winkeln und 4 gleich langen Seiten symbolisiert, bietet sich als eingängige und „schöne“ Formulierung folgende Umformung an:

$$p + q = 4$$
$$p - q = p \cdot q$$

$$\pi \approx 2\sqrt{p \cdot q}$$

Weil die Höhe h_c auf der Hypotenuse eines so konstruierten Dreiecks immer 1/8 des jeweiligen Kreisumfangs betragen wird (mit 99,9 % iger Genauigkeit), beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks die Hälfte der Kreisfläche des Thaleskreises als Halbkreis bzw. ¼ der Kreisfläche des entsprechenden ganzen Kreises (ebenfalls mit 99,9 % iger Genauigkeit).

Dies ergibt sich aus den nachfolgenden Darstellung:

Formel für die Kreisoberfläche:

Formel für das Dreieck usw.

Um dies optisch gut zu veranschaulichen, wird das entsprechende Dreieck sowohl oberhalb als auch seitenverkehrt unterhalb des Durchmessers des Kreises eingezeichnet, wodurch sich ein Rechteck ergibt. Dieses Rechteck belegt innerhalb des Kreises die Hälfte der Kreisoberfläche (mit 99,9 % iger Genauigkeit). Eine weitere Verdopplung des Rechtecks zeigt folglich die gesamte Kreisoberfläche als Rechteck dargestellt (ebenfalls mit 99,9 % iger Genauigkeit).

Literaturverzeichnis

Fritzsche, Klaus (2001).
Mathematik für Einsteiger
Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn.
(2. Aufl.). Heidelberg; Berlin: Spektrum.

Scheid, Harald; Schwarz, Wolfgang (2007).
Elemente der Geometrie.
(4. Aufl.). München: Spektrum

Wellstein, Hartmut; Kirsche, Peter (2009).
Elementargeometrie
Eine aufgabenorientierte Einführung.
Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Verfasser

Hans –Werner Meixner
35435 Wettenberg
Rodheimer Straße 6a

Email: pipatente@aol.com.

Coautor

Christian Meixner
35435 Wettenberg
Rodheimer Straße 6

Kurzfassung:

In jedem Dreieck das nach den nachfolgenden Vorgaben konstruiert wird:

1. rechtwinklig im Thaleskreis

2. die Differenz zwischen den Kathetenquadraten beträgt das Vierfache des Höhenquadrates

wird die Höhe h_c auf der Hypotenuse 1/8 des Kreisumfangs (mit 99,9 % iger Genauigkeit) des Thaleskreises als Länge haben und somit 1/8 Teilkreisabschnitt als Gerade zeigen. Eine Verachtfachung dieser geraden Strecke zeigt folglich den gesamten Kreisumfang als Gerade.